

MEMORIA DE LAS ACTIVIDADES DESARROLLADAS
PROYECTOS DE INNOVACIÓN EDUCATIVA
CURSO 2014/2015

DATOS IDENTIFICATIVOS:

1. Título del Proyecto

Desarrollo de un laboratorio virtual para el estudio del pandeo y de las vibraciones en vigas sencillas mediante elementos finitos.

2. Código del Proyecto

2014-12-5014

3. Resumen del Proyecto

La idea del presente proyecto ha sido desarrollar un programa sencillo que pudiera resolver los problemas de vibraciones de vigas simples, como las que se estudian en distintas asignaturas como Resistencia de Materiales o Mecánica de Materiales, para distintas condiciones de contorno y ver las distintas variaciones en los resultados. Se ha pretendido que fuera atractivo para el alumno en la presentación de resultados y fácil de utilizar. Con la misma filosofía se ha estudiado también el tema del pandeo.

Se ha pretendido como resultado fundamental, familiarizar al alumno con los temas de vibraciones e inestabilidades en vigas sencillas a compresión, sin tener grandes conocimientos teóricos ni de métodos numéricos.

Se ha diseñado el programa en un entorno atractivo de manera que el alumno se pueda familiarizar/iniciar con el método de los elementos finitos (MEF). Mediante este laboratorio el alumno puede discretizar la viga en tantos elementos finitos como necesite y estudiar la convergencia al resultado teórico. Además puede repetir el ejercicio tantas veces como quiera.

- Con este proyecto el alumno se puede acercar a la realidad física del problema y visualizar el problema en un entorno interactivo. La comparativa con los resultados obtenidos en el laboratorio permite ver las semejanzas y diferencias con medios informáticos.

- Se ha pretendido fomentar en el alumno una actitud crítica y darle la posibilidad de que amplíe sus conocimientos en los temas tratados, así como motivarle para estudios más complejos con otros tipos estructurales como placas y láminas.

4. Coordinador/es del Proyecto

Nombre y Apellidos	Departamento	Código Grupo Docente
José Miguel Martínez Valle	Mecánica	29

5. Otros Participantes

Nombre y Apellidos	Departamento	Código grupo docente	Tipo de Personal
M ^a del Pilar Martínez Jiménez	Física Aplicada	47	PDI
Gerardo Pedrós Pérez	Física Aplicada	32	PDI
Teresa M ^a de Jesús Balcaza Bautista			Personal externo

6. Asignaturas implicadas

Nombre de la asignatura	Titulación/es
Mecánica de Materiales	Grados en Ingeniería Mecánica, Eléctrica y Electrónica.
Elasticidad y Resistencia de Materiales	Grado en Ingeniería Mecánica
Mecánica Aplicada	Grado en Ingeniería Mecánica
Calculo y diseño de estructuras	Grado en Ingeniería Mecánica

MEMORIA DEL PROYECTO DE INNOVACIÓN EDUCATIVA

1. Introducción

El estudio de las vibraciones de vigas y del pandeo de vigas es un tema que se estudia en distintas titulaciones presentes en la Universidad de Córdoba, tales como graduado en Ingeniería Mecánica, graduado en Física, graduado en Ingeniería Civil etc.

Con objeto de hacer más atractivo el estudio de estas materias consideradas por los alumnos como un poco `áridas`, hemos desarrollado un laboratorio virtual, para que el alumno pueda utilizarlo desde casa, y asimilar los conceptos desarrollados en teoría.

En la enseñanza asistida por ordenador utilizando laboratorios virtuales o programas de simulación hay que destacar una característica fundamental: su interactividad. La visión de una película de divulgación sobre algún experimento científico al nivel que corresponda, secundaria o universitaria, siendo interesante, está totalmente cerrado, el alumno y también el profesor no pueden alterar la información presentada, siendo sólo posible una discusión sobre lo presenciado. En contraposición, en estos programas, el usuario puede alterar las condiciones de contorno del problema, configurar nuevos experimentos, aprender el manejo de instrumentos, personalizar el experimento, la evaluación, etc.

Tal como se ha comentado, los temas específicos a tratar en este proyecto son las vibraciones y el pandeo de vigas sencillas.

Una vibración mecánica es el movimiento de una partícula material que oscila alrededor de una posición de equilibrio. La aparición de vibraciones en las estructuras es indeseable porque aumentan los esfuerzos y las tensiones, sin embargo su análisis se ha vuelto cada vez más importante debido a la tendencia actual de diseñar estructuras cada vez más ligeras, Fig.1.

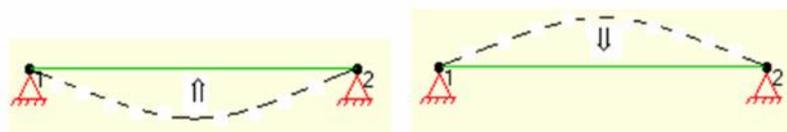


Fig.1. Representación intuitiva de la oscilación vertical de una viga

La ecuación teórica que rige el problema es bien conocida,

$$E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \bar{m} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p$$

Ecuación que tiene solución teórica conocida y exacta. No obstante, nosotros para modelizar el problema hemos optado por una aplicación en MATLAB donde se han programado elementos finitos

sencillos tipo viga (de tipo Hermitico) para poder resolver el problema de autovalores que surge tras la discretización,

$$|K - \omega^2 M| = 0$$

Siendo K la matriz de rigidez del sistema estructural, en este caso nuestra viga, y M la matriz de masas del mismo, donde hemos optado por la matriz de masas consistente. representan las frecuencias naturales.

Para una viga sometida principalmente a esfuerzos de flexión la expresión de la matriz de rigidez tiene por forma,

$$K^e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Donde L es la longitud de la viga, I es el momento de inercia transversal y E el módulo de Young, Como se ha comentado, para la interpolación de las variables, corrimientos y giros, se han usado los polinomios hermiticos que, en un sistema cartesiano ortonormal, adoptan la forma,

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} + \frac{2x^3}{l^3} \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \quad N_4 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

El programa en cuestión es capaz de modelizar vigas con o sin amortiguamiento, sin margen de error respecto de la solución teórica si utilizamos la teoría de Euler – Bernoulli (vigas delgadas) y presentar los resultados en un entorno interactivo y atractivo para los alumnos.

De manera similar, en cuanto al tema del pandeo (Fig. 2), es decir, el tema de la viga recta a compresión, se estudia en profundidad en distintas asignaturas de las titulaciones debido a su enorme importancia tanto teórica como en asignaturas tecnológicas derivadas como estructuras metálicas, de hormigón etc.

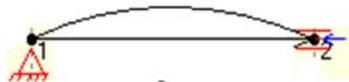


Fig.2 Modelización de una viga a compresión mediante dos apoyos móviles.

Al igual que en el caso de vibraciones, el fenómeno físico se modeliza de manera parecida, como una ecuación diferencial ordinaria de la forma,

$$E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Nv = 0$$

En este caso, para poder utilizar el método de los elementos finitos, hemos introducido el concepto de matriz de rigidez geométrica. Para nuestro caso, que tenemos vigas sencillas y homogéneas, su expresión es,

$$K_g^e = \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Y el problema de autovalores a resolver,

$$|K - \lambda K_G| = 0$$

Donde K ya fue definida previamente.

2. Objetivos

Tal como se ha comentado, el estudio de inestabilidades estáticas o dinámicas en vigas sencillas y homogéneas es interesante para los alumnos de distintas titulaciones en cuanto permiten profundizar en conceptos de análisis de estructuras y permite la iniciación en métodos numéricos para la Ingeniería.

Por un lado, se ha intentado fomentar una visión crítica del alumno respecto a estos temas e intentar hacer del aprendizaje autónomo una posibilidad interesante y atractiva. Para ello, este laboratorio virtual ha servido, en nuestra opinión, para animar al alumno en el aprendizaje de estas materias.

El estudio de estas materias ha permitido iniciar una nueva línea de 'investigación' en relación a la docencia que es la variación de las frecuencias naturales por fenómenos de compresión en vigas.

Para tratar de poner de relieve la anterior idea vamos a exponer sucintamente a continuación, el caso de la influencia del acoplamiento axil-flexión e imperfecciones geométricas iniciales, en el estudio de las frecuencias naturales y modos normales en vigas de Love- Kirchhoof (esbeltas). Esta idea surgió en el ámbito docente a medida que el curso se desarrollaba, Fig 3.

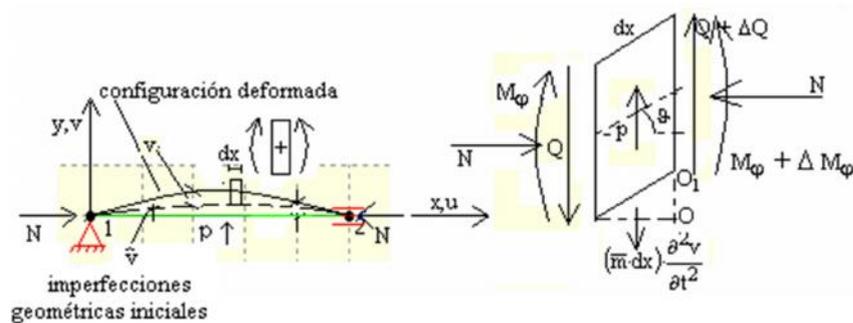


Fig 3. Equilibrio de la rebanada en cálculo geométricamente no lineal.

Al igual que en los problemas inicialmente tratados, una ecuación diferencial, en este caso no lineal, rige el fenómeno, en este caso,

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4 v}{dx^4} + (1 + \alpha) \cdot N \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \bar{m} \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} = 0$$

Su solución analítica al problema es, después de algunos cálculos,

$$v(x, t) = [C_1 \cdot \text{sen}(f \cdot t) + C_2 \cdot \text{cos}(f \cdot t)] \cdot [C_3 \cdot e^{r_3 \cdot x} + C_4 \cdot e^{-r_3 \cdot x} + C_5 \cdot \text{sen}(r_4 \cdot x) + C_6 \cdot \text{cos}(r_4 \cdot x)]$$

Estas constantes de integración definen la forma y la amplitud de la viga en vibración libre y son calculadas considerando las condiciones de contorno en los extremos de la viga.

Si la viga esta en vibración libre simplemente apoyada los desplazamientos y momentos flectores en ambos extremos de la viga deben ser cero, por lo tanto se cumple: $v_{x=0} = 0; (M_\phi)_{x=0} = 0; v_{x=L} = 0; (M_\phi)_{x=L} = 0$.

Estas condiciones de contorno implican

$$v_{x=0} = 0; v'_{x=0} = 0; v_{x=L} = 0; v'_{x=L} = 0$$

La aplicación de las condiciones de contorno en la ecuación de la elástica **4)** y de su derivada segunda, nos da

$$C_3 + C_4 + C_6 = 0$$

$$C_3 \cdot e^{r_3 \cdot L} + C_4 \cdot e^{-r_3 \cdot L} + C_5 \cdot \text{sen}(r_4 \cdot L) + C_6 \cdot \text{cos}(r_4 \cdot L) = 0$$

$$C_3 \cdot r_3^2 + C_4 \cdot r_3^2 - C_6 \cdot r_4^2 = 0$$

$$C_3 \cdot r_3^2 \cdot e^{r_3 \cdot L} + C_4 \cdot r_3^2 \cdot e^{-r_3 \cdot L} - C_5 \cdot r_4^2 \cdot \text{sen}(r_4 \cdot L) - C_6 \cdot r_4^2 \cdot \text{cos}(r_4 \cdot L) = 0 = 0$$

Sistema homogéneo que para que admita solución distinta de la trivial debe cumplir que el determinante de los coeficientes sea nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ e^{r_3 \cdot L} & e^{-r_3 \cdot L} & \text{sen}(r_4 \cdot L) & \text{cos}(r_4 \cdot L) \\ r_3^2 & r_3^2 & 0 & -r_4^2 \\ r_3^2 \cdot e^{r_3 \cdot L} & r_3^2 \cdot e^{-r_3 \cdot L} & -r_4^2 \cdot \text{sen}(r_4 \cdot L) & -r_4^2 \cdot \text{cos}(r_4 \cdot L) \end{vmatrix} = 0$$

Dadas las características de la ecuación trascendente proporcionada por la condición anterior no nos es posible despejar la frecuencia como función del axil N y del nivel de imperfecciones dado por α , $f = f(\alpha, N)$, por lo que deberemos proceder numéricamente. La frecuencia fundamental será el menor valor de f tal que para una pareja de valores N, α dados, haga que el determinante sea nulo.

Para una viga de 4m de longitud y una sección de 0.25*0.25m ($E=21.000.000$ kN/m²) con un axil de 1.250 kN y un nivel de imperfecciones del 50% de la deformada, cuya frecuencia natural (angular) fundamental es de 130.43 rad/s, obtenemos que el valor de la frecuencia desciende a 97.2 rad/s (-25.48%), Fig 4.

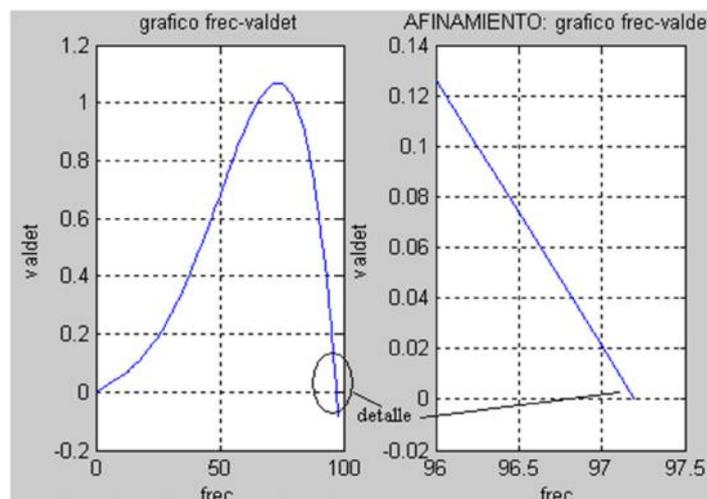


Fig. 4 Grafico comparativo frecuencias- axiles.

Este estudio ha sido, en la opinión de los autores, bastante ilustrativo e interesante y ha permitido profundizar en los temas antes comentados.

Este problema también ha sido resuelto mediante MATLAB.

3. Descripción de la experiencia

La experiencia ha sido gratificante toda vez que los alumnos disponen en los laboratorios del departamento de mecánica, Área de Mecánica de Medios continuos y Teoría de Estructuras, de un laboratorio virtual accesible de forma libre en todos los ordenadores donde visualizar el fenómeno de las vibraciones de vigas. Como se puede ver en los resultados, los alumnos pueden obtener gráficos del fenómeno vibratorio en función de las distintas variables del problema; ya sean datos básicos como longitud, masa o inercia de la viga o bien en función de las condiciones de sustentación: apoyos articulados, empotrados o libres.

Se han observado una mejor comprensión de los conceptos relacionados con el tema e introducidos parcialmente en las asignaturas de Cálculo y Diseño de Estructuras y Mecánica Aplicada. Aunque aún no se pueden inferir conclusiones en base a los resultados obtenidos en las distintas asignaturas, sobre todo en los conocimientos teóricos, los profesores involucrados hemos percibido un mayor interés por parte del alumnado que esperamos redunde en una mejora en sus calificaciones.

4. Materiales y métodos

El material que hemos necesitado ha sido puramente informático. Tener implementado el programa informático Matlab y disponer de algunos medios para llevarlo a cabo.

En los primeros pasos, se ha llevado a cabo el estudio de las posibles interfaces a desarrollar en el programa. Se discutió, la elección de sobre la opción más conveniente en cada caso: entorno de programación, lenguajes de programación, servidor web, etc.

Se ha validado el programa elaborado mediante un conjunto de pruebas para verificar el correcto funcionamiento del sistema validando las soluciones obtenidas con las soluciones teóricas y experimentado en el laboratorio. Asimismo se han estudiado las posibles mejoras que se puedan realizar. Esta etapa se ha llevado a cabo en la elaboración de todo el programa.

Se ha dispuesto a disposición de los alumnos el programa elaborado, y se da la posibilidad de contrastar los resultados con los laboratorios reales presentes en el departamento. Una instantánea de nuestros laboratorios se puede ver en la siguiente fotografía.



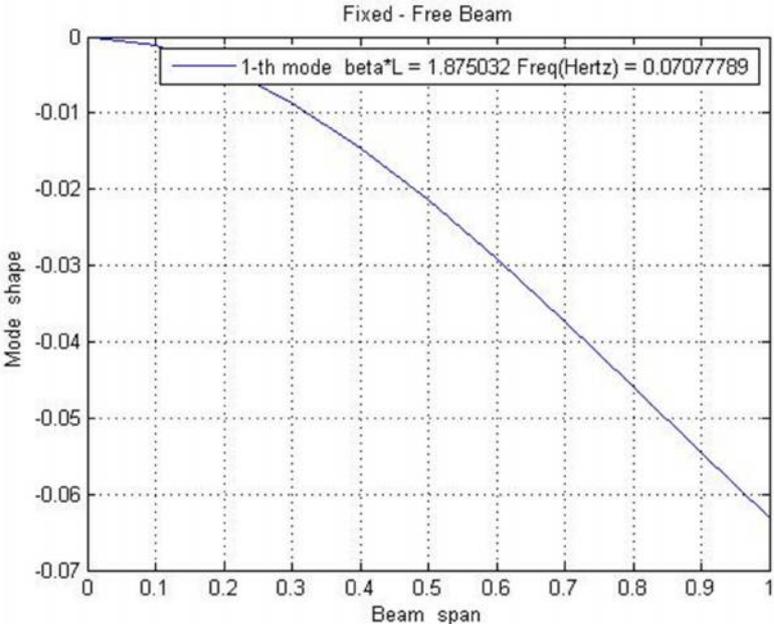
Práctica de vibración de una viga con posibilidad de introducir amortiguamiento. Práctica alojada en los laboratorios del departamento de Mecánica de la Universidad de Córdoba.

5. Resultados obtenidos y disponibilidad de uso

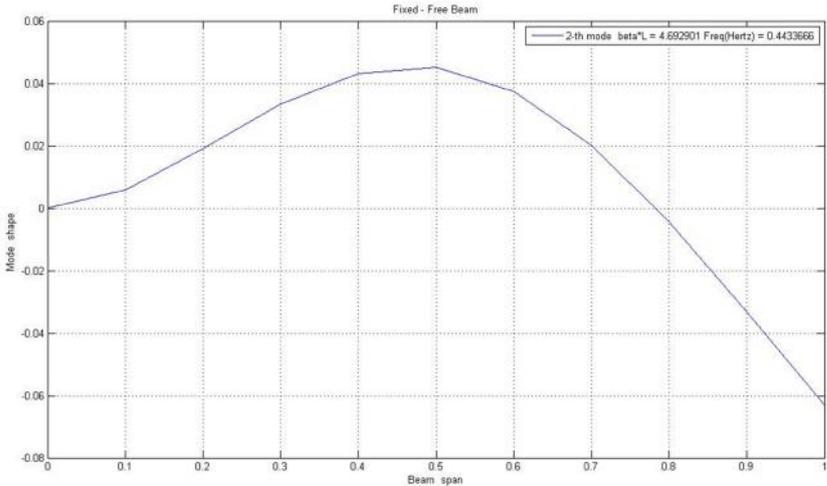
El programa de elementos finitos elaborado permite la modelización de una viga mediante elementos finitos y permite escoger el número de elementos finitos a utilizar. Nos permite representar igualmente los distintos modos de vibración.

Por ejemplo, para una viga de 10m. de longitud en voladizo con sección de 0.2×0.2 , módulo de Young 120000000 (Pascuales) y densidad 2500kg/m^3 , si utilizamos una malla de 10 elementos

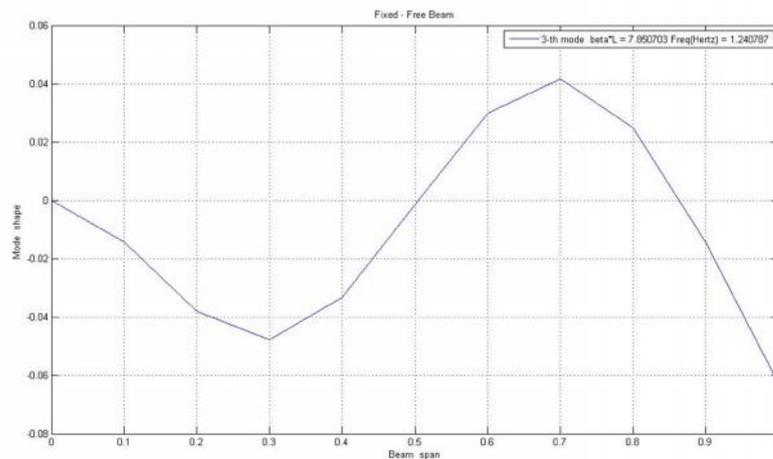
tenemos los siguientes resultados,



Representación del 1º modo de vibración.



Representación del 2º modo de vibración.



Representación del 3º modo de vibración

En la siguiente tabla mostramos los errores cometidos en frecuencias y cargas críticas de pandeo mediante la formulación utilizada con una malla de 50 elementos finitos,

Datos,

Modulo de Young, $E=2.1 \cdot 10^{11}$

Momento de inercia, $I=2003 \cdot 10^{-8}$

Densidad = 61.3

Longitud de la viga = 7 m.

Tabla 1
Frecuencias Naturales (rad/S) y carga crítica de pandeo (N)

Modo	Teoría	MEF	Error %
1	18.8177	18.7964	-0.1132
2	117.6106	117.7989	0.1568
3	329.8443	329.9134	-0.0045
Carga de Pandeo	211808	211808	-0.0010

En este caso la frecuencia fundamental se ha obtenido mediante la conocida formula,

$$f_1 = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{m \cdot L^4}}$$

El programa de elementos finitos elaborado se encuentra alojado en los ordenadores del laboratorio de mecánica computacional del departamento de Mecánica.

Los errores cometidos al utilizar el MEF para resolver el problema son menores del 1 %.

6. Utilidad.

El programa y resultados obtenidos pueden servir tanto a alumnos de los últimos cursos del grado en Ingeniería Mecánica como a profesores que quieran seguir implementando nuevos códigos relacionados con el cálculo estructural de vigas, placas y láminas.

Al ser el laboratorio virtual de acceso abierto y libre puede ser consultado desde cualquier usuario conectado a Internet por lo que puede ayudar a difundir nuestro trabajo en otras universidades y animar a otros profesores que impartan materias similares a colaborar con nuestros grupos de trabajo.

Observaciones y comentarios.

Tal como se ha comentado, es pronto para extraer conclusiones verificables acerca de las mejoras docentes en la comprensión de algunos conceptos por parte del alumnado, en las distintas asignaturas donde se involucran los mismos.

Sin embargo, tal como se ha comentado, se ha percibido por parte de los alumnos una actitud más proactiva y una cierta curiosidad añadida en la discusión de los temas.

Con el paso de los distintos cursos académicos, esperamos tener datos que corroboren estas percepciones y nos animen a proseguir este camino de mejora docente dentro de las asignaturas impartidas desde el departamento de Mecánica de la Universidad de Córdoba y concretamente dentro del Área de Mecánica de Medios Continuos y T^a de Estructuras.

7. Bibliografía.

- Chopra, A. K., (2012) Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 4th Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
- Martínez Jiménez, J. M., Martínez Valle, J. M., Martínez Valle, A. (2010) Diseño y Cálculo Elástico de los Sistemas Estructurales. Tomo I. Estructuras de barras y de vigas. Editorial Bellisco
- Martínez Jiménez, J. M., Martínez Valle, J. M., Martínez Valle, Á. (2010) Diseño y Cálculo Elástico de los Sistemas Estructurales. Tomo II. Inestabilidad y pandeo de estructuras, líneas de influencia y cálculo dinámico. Editorial Bellisco.
- Reddy, J.N., (2002) Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics. 2nd Edition, JohnWiley & Sons Inc., New York.

8. Relación de evidencias que se anexan a la memoria.

Las evidencias de este trabajo docente se han mostrado mediante los gráficos y pequeños desarrollos teóricos presentes en este trabajo.

Se adjuntan las funciones más importantes del código,

1- Función mediante la cual se obtiene las matrices de rigidez lineal y no lineal

```
function [k,kg,m]=beam(E,I,leng,mass)

% Finalidad:
%   Matriz de Rigidez, Matriz de Rigidez Geométrica y Matriz de Masas mediante
elemento finitos tipo viga hermíticos.
%
%
% Resumen:
%   [k,m]=beam(E,I,leng,mass)
%
% Variables:
%   k - Matriz de Rigidez
```

```

%      m - Matriz de Masas
%      E - Módulo de Young
%      I - Momento de Inercia de la Sección Trasnversal
%      leng - Longitud
%      mass - densidad

%-----

% stiffness matrix

c=E*I/(leng^3);
k=c*[12      6*leng   -12      6*leng;...
6*leng  4*leng^2 -6*leng  2*leng^2;...
-12     -6*leng   12      -6*leng;...
6*leng  2*leng^2 -6*leng  4*leng^2];

% geometric stiffness matrix

c1=1/(30*leng);
kg=c1*[36      3*leng   -36      3*leng;...
3*leng  4*leng^2 -3*leng  -leng^2;...
-36     -3*leng   36      -3*leng;...
3*leng  -leng^2  -3*leng  4*leng^2];

% consistent mass matrix

mm1=mass*leng/630;
m=mm1*[234      33*leng   81      -19.5*leng;...
33*leng  6*leng^2  19.5*leng  -4.5*leng^2;...
81      19.5*leng  234      -33*leng;...
-19.5*leng -4.5*leng^2 -33*leng  6*leng^2];

```

Córdoba, 28 de Septiembre de 2015

Sra. Vicerrectora de Estudios de Postgrado y Formación Continua